|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **1. Тригоном. сист ф-ций. Тригоном ряд Фурье.**  **Опр.1**.систему ф-ций 1/2, , , … (1) - наз тригоном системой ф-ций.  Для системы ф-ций (1) справедливо св-во ортогональности.  Св-во1: тригоном ф-ция (1) ортогональна на отрезке [-l,l]. Квадрат нормы тригоном сист (1) равен l, а первой ф-ции l/2, поэтому из (1) получают др системы ф-ций (2): , , , … кот явл нормированной на отрезке [-l,l].  Из св-ва 1 вытекает св-во 2: тригоном ф-ция (2) ортонормированна на отрезке [-l,l].  **Тригоном ряды Фурье:**  **Опр1.** Функциональный ряд вида (1): +a1  где aiєR, bjєR, iєN0, jєN будем наз тригоном рядом.  Более кратко тригоном ряд (1)  запис в виде: . a0,an,bn – коэф-ты тригоном ряда.  Будем считать, что 2l периодическая ф-ция f представляется тригоном рядом (1) на интервале [-l,l], т.е. : f(x)= (2)  Будем считать, что для тригоном  ряда стоящего в правой части (2) выполняются все условия о почленном интегрировании.  Выразим коэф-ты ряда (2) через саму ф-цию f, для этого проинтегрируем  ф-цию по отр (-l,l):  *,*  (3)  для нахождения an умножим (2) на и проинтегр по отр (-l,l):  *-* (4)  для нахождения bn умножим (2) на и проинтегр по отр (-l,l):  bn= - (5)  метод нахождения (3-5) – метод Эйлера-Фурье.  **Опр2:** ф-лы (3-5) – ф-лы  Эйлера-Фурье ф-ции f.  **Опр3:** коэф a0,an,bn вычисленные по ф-лам Эйлера-Фурье наз коэф-ми Фурье заданной ф-ции f.  **Опр4:** тригоном ряд, коэф-ты кот явл коэф-ми Фурье ф-ции f наз тригоном рядом Фурье или просто рядом  Фурье ф-ции f.  **5. Интеграл Дирихле**  Рассм-м n-ю частичную сумму ряда Фурье период-ю ф-цию f: - (1)  Подставим выражение для коэф-в ai, bi в (1):    - (2)      2=2  Из периодичности => t-x=, t=x+    **Опр1.** Интеграл наз интегралом Дирихле ф-ции f. | **2. Ряд Фурье по ортогон-й системе элементов гильбертова пр-ва. Неравенство Бесселя.**  Рассм-м гильбертово пр-во ф-ций L2[a;b] – пр-во ф-ций интегрируемых вместе со своим квадратом на отр [a;b].  В этом пр-ве ф-ции введем скалярное произвед-е (f,g)=,  тогда норма ф-ции f вводится:  В данном гильб-м пр-ве L2[a;b] выберем ортогон систему ф-ций: - (1)  Ортогон-ть означает: , n≠m, n,mєN  Будем считать, что в сиситеме ф-ций (1) нет нулевых, это значит, что - (2)  Замечание: если при всех натуральных n. То сист ф-ций (1)  будет ортонорм-й. В противном случае ее можно нормировать и рассм-ть сист  Поставим задачу об разложении опр ф-ции f на отр [a,b] в ряд по сист ф-ций (1). Это значит нам необходимо найти коэф разложения (3): f(x)= - (3)  Воспользуемся методом Фурье - умножим на и проинтегр на [a;b]:,  учитывая св-во ортогон-ти и (2) т.о. имеем: ,  Учитывая (2): - (4)  **Опр1:** Ряд (3) по ортогон сист ф-ций (1) гильб пр-ва L2[a;b] коэф-ты кот находящийся по ф-ле (4)  наз обобщ-м рядом Фурье ф-ции f. Сами коэф-ты an- обобщ коэф Фурье.  **Неравенство Бесселя.**  **Т1**. Пусть ф-ция f из пр-ва L2[a;b]. - ортогон сист ф-ций  пр-ва L2[a;b]. Тогда длю коэф Фурье  ф-ции f по ортогон системе выполняется неравенство Бесселя:  , где   - (1)  В обозначениях нормы неравенство Бесселя (1) запис в виде:  **Док-во**: исп-я св-во ортогон-ти  для m-х частичных сумм ряда Фурье ф-ции f имеем:    Последнее неравенство означает, что все частные суммы ряда Фурье ограничены сверху квадратом нормы ф-ции f. Поэтому данный числовой ряд сх-ся, а его сумма не превосходит квадрат нормы ф-ции f. Т.е. неравенство Бесселя верно, т-ма док-на.  Для тригоном систем ф-ций неравенство Бесселя принимает вид:  **6. Сходимость и равномерная сходимость тригонометрического ряда Фурье. Воздействие гладкости функции на порядок её коэффициентов Фурье.**  Положим: f(x)1? Тогда к-ты Фурье ai,bi=0 i-натуральный. Sn(x)=1, n. Подставим эти данные в интеграл Дирихле. 1=умножим получаем равенство на f(x): f(x)=fn(x)-f(x)=Таким образомсходимость ряда Фурье ф-ииf зависит от стремления к нулю непрерывно стоящей в правой части последнего равенства. когда n. + =+ . Последний интеграл есть к-т Фурье ф-ии: Ф1=, а значит в силу необходимости признака сходимости этот интеграл, когда n. =; т.о(1). соотношение стоящее справа, интегрирование ведется по признаку: , значит интеграл зависит только от значения ф-ииf в некоторой открытой точки х. т.о сходимость ряда Фурье, в данной точкех, зависит только от поведения ф-ииf в достаточно малой области этой точки. В этом и заключается принцип локализации исследуемого ряда Фурье. Непосредственно из соотношения (1) следует что если по ф-ииf построен ряд Фурье. F(x)+, то этот ряд сходится к регулярной точке ф-ииf. Т.е+=, x[-], x=+-, в граничных точках в частности, для непрерывной ф-ии+, x[-] | **3. Полные и замкнутые системы ф-ций.**  **Опр1.** Ортогон сист ф-ций наз замкнутой, если для любой ф-ции f данного гильбертова пр-ва и для любого положения найдется такая лин комбинация отклонения кот от f по норме  гильб-ва пр-ва меньше .  **Т1.** Если ортогон сист явл замкнутой, то для любого элемента  f в рассм-м гильб пр-ве неравенство Бесселя переходит в равенство Парсеваля:  **Опр2.** Ортогон системой ф-ций  наз полной, если кроме нулевого элемента не сущ-т никакого др элемента этого гильб пр-ва кот был бы ортогонален ко всем элементам системы ф-ций {}. Др словами сист элементов будет полной, если любой элемент f гильб пр-ва  ортогон-й ко всем элементам  сист явл нулевым элементом.  **Т2.** Всякая замкнутая ортогон  система ф-ций явл полной.  **Док-во**: Пусть {} – полная ортогон система ф-ций. f – любой элемент данного гильб-ва пр-ва ортогон всем элементам системы, тогда коэф  Фурье будут =0. Тогда из равенства Парсеваля вытекает что =0, из св-ва  нормы => f – нулевой элемент. Что и требовалось док-ть.  **Т3.** Для любой полной (а значит и замкнутой) ортогон системы  ф-ций два разных элемента гильб пр-ва не могут иметь одинаковых рядов Фурье.  Из Т3 => св-во: два ряда Фурье = между собой, тогда и только тогда, когда равны их соотв-е коэф-ты Фурье.  **8. Комплексная форма ряда Фурье.**  Пусть функция f (x) определена в интервале [−π, π]. Применяя формулы Эйлера:  можно записать ряд Фурье данной функции в комплексной форме: f(x)=.Мы использовали здесь следующие обозначения:=, , =.  Коэффициенты cn называются комплексными коэффициентами Фурье. Они определяются формулами:  Если нужно построить продолжение функции f (x), имеюшей произвольный период 2L, то соответствующее выражение в комплексной форме имеет вид: где f(x)=.  **9. Кратные ряды Фурье**.  кратный ряд Фурье можно записывать как в комплексной форме:  рассм.также и ряды Ф.для ф-й неск.переменных-кратные. Пример в случае ф-и 2-х переменных:f=f(x,y).когда ф-я f 2π-период.по своим аргументам.значит ее значние целиком опр.на прямоуг.П: П={f(x,y), -π≤x≤π, -π≤y≤π}. тогда двойной ряд Ф.ф-и f в компл.форме: f`~ (1) (1)-cх.равном.и абсолютно. Значит его слагаемое можно менять местами. Т.к.порядок следования сложенных в (1) не зависит для суммы ряда,то: f~ (2) коэфф. Этого разложения вычисл.по ф-ле:  (3) если рассматривать двойной ряд Ф.в действ.форме,то запис.достаточно объёмно. f~ (4). вопрос о сх.двойн.рядов Ф.(2) и (4) решается путем исследования их частичных сумм Sn(x0,y0). Для этих сумм можно получить интнгр.представления в виде двойного интеграла Дирихле. Заметим,что дв.ряд Ф.ф-и f безусловно сх. в т.(x0,y0), если выполн.след.условия: 1) частные производные 1-го порядка сущ. и ограничены на R²; 2)в окр-ти данной точки сущ.смешанная производная 2-го порядка и эта производная непрерывна. Заметим, что аналогично рассм.ряды Ф.в случае n-незав.переменных. там коэфф Ф.вычисл.с помощью n-кратных интегралов. Также рассм.крастные интегралы Ф.и для ф-и f,кот.имеют разные периоды по своим аргументам. | **4. Приближение непрерывной ф-ции тригоном-ми многочленами. Полнота и замкнутость тригоном системы**.  Выражение вида (1) наз тригоном многочленом  - (1)  где к – произв-е целое неотриц  число; - произв-ц действит-е пост число.  **Лемма1**: если T(x) явл (тригоном) алгебр-м многочленом степени к, то выражения T(cosx), T(sinx) явл тригоном многочленами.  **Лемма2**: если Т(х) какой-нибудь тригоном многочлен, то  Т(х)=>T(x)sinx, T(x)sin^2x, также явл тригоном многочленом.  Справедливость этих лемм => из  того, что произведение ф-ций sinx и cosx аргумента х приводит к лин комбинации тригоном ф-ций  sin и cos аргументов вида .  **Т1.** Если ф-ция f непрерывна на отр и удовл-т усл-ю f(-)=f(), то эту ф-цию можно равномерно приблизить к тригоном многочленам на отр .  **Т2.** Для того чтобы ф-цию f можно было равномерно приблизить  на отр к тригоном  многочлену необх-мо и достаточно, чтобы ф-ция f была неперерывна на отр и выполнялось усл f(-)=f().  **Док-во:** достаточность Т2 гарант Т1. Необходимость: пусть сущ-т  послед-й тригоном многочлен кот на отр равномерно  сход-ся к ф-ции f. Тогда согласно теореме о пределе функц-й послед придельная ф-ция f будет  непрерывна на отр . Это означает, что для произв  положит-го найдем такой  тригоном многочлен  .  , . Склад-я два неравенства получим: =>  **Полнота и замкнутость тригоном системы**.  **Т1.** Тригоном система явл замкнутой.  **Док-во:** замкнутая тригоном система означае, что для любой кусочно-непрервной на отр ф-ции f и любого полож найдется тригоном многочлен Т, такой, что: - (1)  Введем в рассм-е ф-цию F кот целиком совпадает с f за исключением достаточно малых окресностей точек разрыва f и точки f=.  В этих малых окрестностях  ф-ция F явл лин так, чтобы в  целом ф-ция F была непрерывноц на отр и выполнялось усл , .  Поскольку кусочно-непрер-я  ф-ция f и лин ф-ция которая ее  срезае ограничена, то если выбрать окрестности достаточно малыми может потребоваться выполнение усл-я: - (2)  Ф-ция F удовл условию f(-)=f() => след-но сущ-т тригоном многочлен, такой, что:  тогда разность этих ф-ций по норме: . Отсюда из (2)  и неравенства треуг да нормы => справедливость неравенства (1).  Т-ма док-на.  Поскольку пр-во L2 на отр явл гильбертовым, то из замкнутости тригоном системы => ее полнота, а именно имеет место Т2.  **Т2**. Тригоном система явл замкнутой и полной.  **7. Почленное дифференцирование рядов Фурье**  Если ряд Фурье функции f(x) продифференцировать почленно, то полученный ряд , (1) вообще говоря, будет расходящимся, даже если в рассматриваемой точке х для функции f(x) существует конечная производная f (х). : почленное дифференцирование приводит к повсюду расходящемуся ряду .Однако имеет место следующее интересное предложение, принадлежащее Ф а т у (1): если в точке х существует конечная производная f (х), то ряд суммируем по методу Пуассона — Абеля и именно к сумме f (х). Для доказательства продифференцируем по х ряд Пуассона (2) почленное дифференцирование здесь допустимо в силу равномерной относительно х сходимости полученного ряда. Тот же результат получится, если продифференцировать по х интеграл Пуассона: =причем в этом случае можно дифференцировать под знаком интеграла по теореме 3. Последний интеграл преобразуем так: = (3)  Положим g(t)= если переписать это выражение в виде g(t)=  то станет яясно, что g(+0)=f’(x).Положим в (3), в частности, f(x) = sin x. Тогда f(r,x)=rsin x, , Подставляя все это, по сокращении на г cos х, получим, что |
| **10.Интеграл Фурье и его комплексная форма**  Пусть ф-ияf определена на Rи абсолютно интегрируема: (1) предположим, что fрасложена в ряд Фурье на интервале: f(x)= (2) . ; (3) подставив (3)в (2) аналогично как в интеграле Дирихле получаем: f(x)=введем обозначения: , , …, (5)  f(x)=+((t-x)dt) (6)  поскольку ф-ияf- абсолютно интегр., то первое слогаемое (6). , =0, второе слагаемое: выражение, стоящее под знаком суммы, является ф-ией аргумента и принимает значения от до поэтому данную сумму, мы можем рассматривать как интегральную сумму Дарбу, которая в превращается в интеграл.Т.о. в из (6)получаем = (7). Определение: выражение, стоящее в правой части (7), наз. Интегралом Фурье ф-ииf. РАВЕНСТВО (7) справедливо в точках непрерывной ф-ииf/ используя в точках разрыва 1-го рода правая часть равенства (7)сходится к регулирующему значению. =,7a  формулу (7) применяем: = (8) рассмотрим частные случаи равенства (8)  =0; f(x)= (9)  В случае нечетности получаем: f(x)= (10) если fопределена на луче (0, в первом случае говоря о четности прод. Ф-ииfна луч (четном продолжении. Введем обозначения: а(=b(=  f(x)= (11)  F((12), f(x)=(13  Опр2: правую часть равенства (12). Наз. Косинус-преобразованием Фурье ф-ииfи обозначим , правую часть равенства (13) наз. Обратным косинус-преобразованием Фурье ф-ииf=-косинус-преобразование Фурье позволяет нам изв. Ф-ииfстроить новую ф-июF, которую наз. Образ. Ф-ии f косинус-преобразованием F. | **11. Методы приближённого суммирования рядов Фурье**.  Пусть f – приближ-я ф-ция.; - послед-ть частных сумм ряда Фурье ф-ции f.  **Опр1**. Среднее арифметическое частных сумм Фурье ф-ции f наз суммой Фейера и обобщены  *-* (1)  - (2)  -(3)  Подставим (2) в (1), тогда для сумм Фейера получим:  - (4)  - (5)  **Опр2**. Ф-ция в (5) наз ядром Фейера.  **Св-ва ядра Фейера:**  1. Ядро Фейера есть четная,  период-я, непрерывная ф-ция.  2.  3. принимает неотриц-е значения  4.  **Т1**. (т-ма Фейера): послед-ть сумм Фейера период-й, непрерывной ф-ции равномерно сходится к самой ф-ции.  **14.Особенности оригиналов и образов при преобразовании Лапласа.**  1. Однородность: При умножение оригиналаf(t) на постояннуюобраз F(p) увеличивается на эту постоянную; Учитывая f(t)F(p) получ. αf(t)αF(p).док-во: справедливость этого выражения непосредственно вытекает из определения образа и св-ва определенного инт.: L[αf(t)]==αdt= =αF(p).  2.Аддитивность: если f(t)F(p) и ɥ(t)Ф(p) тоf(t)+ɥ(t)F(p)+ +Ф(p). Док-во: непосредственным интегрированием суммы нах.:  L[f(t)+ ɥ(t)]=dt=dt + +dt=F(p)+Ф(p). Следствие1: Образ конечного количества оригиналов есть сумма их образов. Следствие2: если f(t)F(p) и ɥ(t)Ф(p) то для любых constC1 и C2: С1f(t)+C2ɥ(t)C1F(p)+C2Ф(p).  3.Подобие: еслиf(t)F(p) иα>0, f(αt)(1/α)F(p/α). Следствие1: если f(t)F(p) и β>0, то (1/β)f(t/β)=F(βp).  4.Сдвиг в оригинале: еслиf(t)F(p) и t0>0, то: f(t-t0)F(p). Это обозначает что включение оригинала с опозданием на t0 соответствует умножению образа на .  **16.Связь преобразования Лапласа с преобразованием Фурье**  Прямое преобразование Фурье функции f(t),где s>s0, s0-показатель роста оригинала f будет прямым преобразованием Лапласа оригинала f, это значит: L[f]=F(p)=.  f(t)=(1/2i)Правая часть этого равенства называется обратным преобразованием Лапласа и обозн. L-1  Если функция f-оригинал, а F- его образ, то: f(t)=(1/2i)=-формула обращения преобразования Лапласа. | **12. Понятие обобщённой функции**  **п.1.осн.ф-и.** рассм. n-мерное евклидово пр-во . Пусть x(x1,x2,…,xn). опр.1.ф-ю φ(х) назовем фенитной, если сущ.огранич.откр.мн-во U такое,что φ(х)≠0, . Замыкание мн-ва U= - носитель фенитной ф-и φ: Supp φ=. Будем считать, что задана φ(. Пр-во всех таких ф-й обозначим D(введем в рассмотрение посл-ть ф-й {. опр.2.посл-ть { сх.к φ(х): {φ(x), если выполнены след.условия: 1) { равномерно 2) 3) cущ.огранич.откр.замкн.мн-во G такое,что носители Supp φk(x)Supp φ=G. пр-во D(c указанной сходимостью будем наз.пр-вом осн.ф-й. на этом пр-ве введем в рассм-ние лин.ф-ционал f,действ.на ф-и φ ч/з пр-ва осн.ф-й. т.е. :φ ):(f,φ) . опр.3.ф-ционал f назовем лин.,если выполн.р-во: (f,α1φ1α2φ2)=α1(f,(f,φ2), ), . (1) опр.4.ф-ционал f назовем непрер.,если для любой посл-ти { выполено условие: . (2) опр.5.лин.непре.ф-ционал f на D() наз.обобщ.ф-ей. Лин.пр-во всех обобщ.ф-ий обозначим Д(). **п.2.регулярные обобщ.ф-и.** рассм. произв.лок.-инт.ф-ю g(x),заданную на . С помощью этой ф-и построим лин.ф-ционал gД(): (g,φ)=. Исходя их св-в опред.n-кратного интеграла следует,что ф-ционал g-линейный. Проверим условие непрерывности: . Предельный переход под знаком интеграла законен в силу равном.сходимости посл-ти . Т.о. любую обычную ф-ю можно рассматривать как обобщ.ф-ю: gД(). Такие обобщ.ф-и будем наз.регулярными обобщ.ф-ями. Все остальные обощ.ф-и будем наз.сингулярными.в качестве сингулярной обобщ.ф-и рассм.δ-ф-ю (ф-я Дирака). δ=δ(x-() Д(). Данный ф-ционал действ.на ф-ю φD(): (δ,φ)= (3) можно показать,что (3) явл.лин.и непрер. Т.е.(3) – действительно явл.обобщ.ф-ей. | **13. Преобразование Лапласа**  Интегральное преобразование, которое переводит функцию f в функц. F(fF-Соответствие между функцией-оригиналом и образом) по формуле: наз. **интегральным преобразованием Лапласа.**Функция f(t) наз. оригиналом, а функ. F(p)-образом.  Св-ва преобразования Лапласа:  1. Линейность: f(t),g(t)-оригиналы; F(p),G(p)-их образы, то их лин. комбинация αf(t)+βg(t) тоже функция оригинала, и  αf(t)+βg(t)αF(p)+βG(p), где α,β-const.  2.Теорема подобия: если функция f(t) оригинал функ. F(p), α-const(>0), то: f(αt) (1/α)F(p/α).  3.Теорема смещения: если f(t)F(p), то , где α-произвольное комплексное число.  4.Теорема запаздывания: если,(т.е. f(t)ɳ(t)F(p)), то  f(t-) ɳ(t-)F(p) для любого ≥0  5.Интегрирование оригинала:  Если ***f***(***t***) - функция-оригинал, и f(t)F(p), то тоже функция-оригинал, и F(p)/p  6.Дифференц. оригинала:Если функция-оригинал ***f***(***t***) имеет производную ***f*** ′(***t***), тоже являющуюся оригиналом, и f(t)F(p), то ***f*** ′(***t***)pF(p)-f(0)  **15.Особенности оригиналов и образов при преобразовании Лапласа**  1. опоздание в образе: если f(t)F(p) и с-любой комплексное число, то . Док-во:L[]= =dt = dt=F(p-c). Доказанная теорема позволяет находить образ умножения показательной функции на оригинал, образ которого уже известен.  2.Дифференцирование оригинала:еслиf(t)-непрерывно дифференцируемая функция на (0;+) и f` принадлежит множеству оригиналов, то учитываяf(t)F(p) получаем:f`(t)pF(p)-f(+0). Док-во: по условииf` принадлежит множеству оригиналов. Запишем для её преобразование Лапласа и проинтегрируем по частям: L[f`(t)]=dt= =d(f(t))=f(t)pdt=pF(p)-f(+0).  3.Особенности свертки оригиналов: сверткой двух функций fи g наз. интеграл и обозн. f\*g= . Таким образом свертка оригиналов опр.: f\*g=.Для свертки функций справедливы следующиезаконы: 1)f\*g=g\*f; 2) (f\*g)\*=f\*(g\*ɥ); 3)(f+g)\*ɥ=f\*ɥ+g\*ɥ.  Св-васверткииоригиналов: 1)еслиf(t)F(p)иg(t)G(p)тоf\*gF(p)G(p); 2) еслиf(t)F(p) иg(t)G(p) ифункцияf` принадлежитмножествуоригиналов ,тоF(p)G(p)f(+0)g(t)+f`\*g. |
| **17. Применение операционного исчисления к решению линейных дифф ур-й.**  Постановка задачи: Требуется найти решение лин  дифф ур-я с постоянными коэф-ми:    удовлетворяющее нач усл-м Коши:  y(0)=c0, y’(0)=c1,…,  где c1,c1… - заданные числа, ф-ция y(t) вместе с ее рассм-ми производными и ф-ция f(t) явл оригиналами.  **Решение**. Пусть y(t)=Y(p), f(t)=F(p). Пользуясь св-ми дифференцирования оригинала и линейности, перейдем  от оригиналов к изображениям:    Разрешая это операторное уравнение относительно Y(p), получим:  Положим    Тогда - операторное реш-е искомого дифф-го ур-я.  Определяя оригинал y(t), соответствующий найденному изображению Y(p), получаем искомое решение.  **Замечания**. **1**.Полученное реш-е y(t) во многих случаях  оказывается справедливым при всех R∈t, а не только при 0 ≥ t. **2**. При нулевых нач усл-х реш-е операторного  ур-я примет вид Y(p)=F(p)=Q(n) | **18. Общая характеристика математических моделей, соответствующих физическим процессам.**  **Опр1.** Ур-е связывающее неизв ф-цию u независ переменные (t,x1,x2…xn), а так же частные производные от неизв ф-ции наз дифф ур-м с частными производными.  F(t,x1,…, xn,U, (1)  F – заданная ф-ция своих аргументов; к – мульти индекс с корд-ми (к0,к1,…,кn); lкl=к0+к1+…+кn  **Опр2**. Порядок самой старшей производной входящей в задание ур-я (1) наз порядком этого дифф ур-я с частными производными.  *–* ур-е 1-го порядка  – ур-е 2-го порядка  **Опр3**. Ур-е с частными производными от нескольких неизв-х ф-ций U1,U2,…,Un наз ур-м m-го порядка, если оно содержит частную производную порядка m и не содержит частных производных более высоких порядков.  **Опр4**. Ур-е с частными производными наз линейным, если оно линейное относ всех неизвестных ф-ций и их частных производных.  – лин дифф ур-е 2-го порядка  **Опр5**. Ур-е с частными производными наз квазилинейным, если оно линейное относ всех старших производных от неизв-х ф-ций.  - квазилин-е дифф ур-е 2-го порядка  **Опр6**. Реш-м ур-я с частными производными (1) наз всякая ф-ция, кот при подстановке в ур-е (1) вместо неизвестной ф-ции преобразует это выражение в тождество по независ-м переменным.  u=u(x,y)  - (2) – простейшее ур-е с частными производными  - (3) - общее реш-е ур-я (2)  -(4) – частное решение ур-я (2)  - (5) – общее реш-е ур-я (4)  Ур-е с частными производными может иметь ∞ много решений.  Чтобы выделить из всего множества решений одно, необходимо на искомое решение наложить дополнительно условие.  Такими дополнительные условия могут быть начальные и граничные условия, которые чаще всего вытекают из физ-й постановки задач. | **19. Классификация линейных уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными.**  Рассм-м лин ур-е 2-го порядка с двумя независ-ми переменными:  - (1)  где A,B,C,D,E,F,G,H – ф-ции аргументов x,y. Ф-ции A,B,C имеют непрерывные частные производные до 2-го порядка включительно на области Д.  Считаем что A,B,C на обл Д одновременно не обращ-ся в 0.  Ур-ю (1) соотв-т квадратичная форма:  - (2)  (x0,y0)єД. Зафиксируем некоторую точку (х0,у0) в обл Д и проведем классификацию ур-я (1) в этой точке.  **Опр**1. Лин дифф ур-е 2-го порядка (1) наз дифф ур-м гиперболического типа в точке (х0,у0), если квадратичная форма (2) в этой точке знакосменная, т.е. если:  **Опр2.**Лин дифф ур-е 2-го порядка (1) наз дифф ур-м параболического типа в т (х0,у0), если квадратичная форма (2) в этой точке знакопостоянная, т.е. если:    **Опр3**. Лин дифф ур-е 2-го порядка (1) наз дифф ур-м эллиптического типа в т (х0,у0), если квадратичная форма (2) в этой точке знакоопределенная, т.е. если:    **Опр4**. Ур-е (1) принадлежит к эллиптическому (гиперб-му, параб-му) типу на обл Д, если во всех точках этой области это ур-е принадлежит эллипт-му ( гиперб-му, параб-му) типу.  Принадлежность ур-я (1) к тому или иному типу опред-т знак выражения в связи с этим его наз дискременантом ур-я (1).  Ур-е Д(х,у)=0 чаще всего опред-т некоторую простую гладкую прямую q, кот делит всю обл Д на две части  В обл D1 согласно определениям, ур-е (1) – эллиптическое  В обл D2 – гиперболическое  На линии q – параболическое  Поэтому будем говорить, что в целом на всей обл Д ур-е (1) смешанного типа, при этом Д1 – обл эллиптичности, Д2 – гиперболичности, q – параболичности. | **20. Приведение к каноническому виду лин ур-й 2-го порядка с двумя независимыми переменными (случай гиперболического типа).**  Рассм-м ур-е (1):    В ур-и (1) вместо (х,у) введем переменные по формулам: q=q(x,y); p=p(x,y); q,p – дважды непрер-но дифф ф-ции на Д.    ,          – лин ф-ция аргументов  - (2)    -(3)- характеристики ур-я (1)  **случай гиперболического типа:**  Будем считать, что хотя бы один из коэф-в не = нулю A,C.  Т.к. , то левая часть ур-я (3) расклад-ся на лин множетели:    ,  ,    =0  *- (4)* – ур-е характеристиу ур-я (1)  Т.к. (4) рабивается на два ур-я 1-го порядка, то можем утверждать, что ур-е (4) всегда имеет два линейно-независимых интеграла , , а значит ф-ции опред-т интегр кривые ур-я (3), т.е. явл-ся характеристиками для ур-я (1) с частными произв-ми  Предположим ,  Тогда поскольку реш-я (3), то согласно (2)  Т.о. при замене ,  – кононический вид ур-я гиперболического типа. |
| **21. Приведение к канонич-му виду лин ур-й 2-го порядка с двумя независ-ми переем-ми (случай парабол-го типа).**  Рассм-м ур-е (1):    В ур-и (1) вместо (х,у) введем переменные по формулам: q=q(x,y); p=p(x,y); q,p – дважды непрер-но дифф ф-ции на Д.    ,          – лин ф-ция аргументов  - (2)    -(3)- характеристики ур-я (1)  **случай параболического типа: Д=0**  т.к. , то хотя бы один из элементов A или C не = 0. Будем считать, что А не = 0.  Ур-е характеристик преобраз-ся к лин ур-ю 1-го порядка:  *,* а значит имеет только один лин-независ-й интеграл.  Пусть в замене , где – характеристика  В качестве второй ф-ции p возьмем произвольную ф-цию дважды непрерывно дифф-ю, так, чтобы замена была невырожденной.  Поскольку - характеристика, то    - (4)  А значит в силу (4)  в силу невыражденности преобраз-я.  Разделив преобразованное ур-е на получим:  *–* канонический вид ур-я параболического типа.  **25. Постановка краевых задач для уравнений гиперболического типа**  Для однозначного описания конкретно наблюдаемого процесса необх. доп. к ур-ю колебаний потребовать выполнений опр. условий, кот-рые в основном диктуются физ. постановкой задач. Такими усл. явл. краевые условия, начальные и граничные. Различают 3 осн. типа краевых задач: 1) задача Коши (задает нач. усл., обл. определения есть, граничные усл. отсутствуют. 2) Краевая задача (задаются границы, нач. усл. нет). 3)Смешанная задача (задаёт нач. и граничные условия).  G€-обл, -граничная огбл. G. Таким образом обл. изменяет пространство переменной х в ур. гиперболич. типа (1). H=(0, T)xGс высотой Т и основанием G.   1. Для ур-я гиперболического типа задача Коши допускает след. интерпретации: u(t, x) которая удовл. ур. (1). В полупространстве n>0 и нач. усл. =u0(x); (2). При этом необходимо выполнить усл. гладкости. Fнепрерывна в полупр-веt>0, но непрерывно дифференцируема и непрерывна на . Рассм. квазилинейное диф. ур-е 2го порядка (3). Пусть задана кусочно гладкая пов-ть, t= и ф-ции u иu0 на этой пов-ти Е. Задача коши ставится след обр: необходимо найти ф-ю u(t, x)(t>0)(t>=0)которая в нек. части области примыкает к пов-ти Е, направлен в сторону увелич. t, t>удовл. ур. (3)и на Е краевым усл. u|E=u0, (4), где n- вектор к нормали Е, напр. в сторону увеличt. 2) смешанная задача. Найти ф-ю u(t, x)€ удовл. (1)на цил. Н начальному усл. (2)на нижн. основании цил. Н и граничн. усл. ( (5) где -кусочно непрерывные ф-ции на S, (x)>=0, на бок. поверхности цил. Н.При этом должно выполн. усл. гладкости Fнепр.в Н, u0 непр. дифф-ма на G, v кусочно непрерывна на бок. пов-ти [0xT]xS. Это усл. гладкости и согласования. (6). 3)Др. краевые задачи. Задача Гурса.Рассм. лин. диффуругиперболич. типа 2ух независимых переменных в канонич. форме: (7)с коэф. а, b, с в замкнутом прям-ке П''=[0,x0]x[0,y0]. Нужно найти u€, €C(П)удовл. (7) на П и принимает заданное зн-е на его сторонах .     **34. Метод Фурье для уравнения гиперболического типа в многомерном случае.**  Рассмотрим ур-ние:  Где, L(u)=  Второе из неравенства выражает тот факт , что ур-ние принадлежит гиперболическому типу. | **22. Приведение к каноническому виду линейных уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными (случай эллиптического типа).**  Рассм-м ур-е (1):    В ур-и (1) вместо (х,у) введем переменные по формулам: q=q(x,y); p=p(x,y); q,p – дважды непрер-но дифф ф-ции на Д.    ,          – лин ф-ция аргументов  - (2)    -(3)- характеристики ур-я (1)  **случай эллиптического типа: Д<0,**  Переходя на множ-во комплексных чисел получаем коэф-ты A,B,C аналит-ми ф-ми. А значит коэф-ты ур-я характеристик так же явл аналит-ми ф-ми. И в силу теоремы Ковалевской, ур-е характеристик имеет комплексно значную характеристику.  , где – комплексно-значная ф-ция.  В замене положим:  Якобиан такого преобраз-я не нулевой.  Подставим комплексно-значную характеристику в ур-е характеристик и выделим там действительную и мнимую часть.  В результате получим: ,  Тогда разделив преобразованное ур-е на получим:  – канонический вид ур-я эллиптического типа.  **26. Корректные и некорректные задачи матфизики. Пример Адамара**  Т.к. задачи мат. физ. есть мат. модель физич. процессов, то их подстановка должна удовл. след. требованиям: 1) реш-е должно сущ. в некотором классе функций М1; 2)реш-е должно быть одним в нек. классе фцнкций М2; 3)реш-е должно непрерывно зависеть от нач. задачи, т е нач. и граничные данные свободного члена коэф. уравнения непрерывно зависит U от данных задачи Û означает след: пусть посл-ть, к=1, 2, …в некот. месте стремится к Û и , тогда U-реш-е задачи. Тогда . Например: пусть задача приводит к ур-ю αU=F, где α-линейный оператор, который переводит H в N, где H и N-линейные пространства. Из функционального анализа вытекает, что неразрывная з-тьреш-ийU от свободного члена Fбудет обеспечена, когда существует и ограничена с Nв H. Неразрывно зависимое реш-е должно быть. Обычно физ. данные определяют с эксперемента с нек. погрешностью, поэтому нужно чтобы эти погрешности существенно не влияли на решение. Задача, которая соотв. всем этим требованиям наз .корректной.**Пример Адамара**: начальные данные и свободный член ур-я явл. неаналитическими ф-ми и может не быть непрерывной з-тиреш-я от нач. данных.. Для ур-я Лапласса, , k  **28. Метод волн, которые распространяются.**  Выясним физ. смысл реш-я Даламбера U(t, x)=. Рассм. колебание, когда смещение струны опр. формулой: U1=. Пусть наблюдают в нач. мом. времени t=0 в точке С струны перемещение, направленное в напр-ии оси ох со скоростью Q. Тогда х=с+at. Ф-я U1 описывает распространение прямой волны, т е р-е (1) представляет собой прямую волну, движущуюся в направлении оси ох со скоростью Q. Аналогично U2= представляет собой обратную волну. Тогда реш-е Даламбера есть сумма прямой и обратной волн. Это приводеит к след. графич способу построения формы струны в любой мом. вр-ни t. Изначально строим кривые U1= и U2=, которые обозн. прямую и обр. волны в нач. мом. времени t=0. Чтобы получить форму струны, нужно построить алгебраич. сумму координат раздвинутых кривых. Рассм. верхнюю полуплоскость 0xt в которой ось х соотв. положению равновесия струны при t=0. Любая точка с коорд. t, x характеризует точку х струны в мом. вр-ни t. Можно найти те точки струны, нач. возбуждение в которых дошли в мом. вр-ни t к т. х0. Это будут точки с абсциссами x0+-at0. Для их нахождения дост. построить 2 хар-ки: ax-at=x0-at0, ax+at=x0+at0. Вдоль 1ой хар-ки ф-я сохраняет постоянное зн-е. Эта прямая опр-ет те точки, при которых прямая волна имеет то же отклонение что и в точке (t0, x0). 2я хар-ка имеет ту же роль для обратной волны . ТО возбуждения распространяются по характеристикам.  **32. Метод Фурье для уравнений свободных колебаний струны.**  =;0.При гран.усл.=0,; .=0,tпри .=(x);=(x); 0;Сначала будем искать частное реш.(1) не равно 0 и использовать гран.усл.(2);u(t,x)=T(t)X(x)-(4). Подстав.(4)в(1):X=T;=-(5);  T=0-(6);;X(0)=X(L)=0-(8)-гран.усл.(8)получ.из(4)подст. В (2);T(t)\*X(0)=0;t; Задачи(7)(8)наз.зад.Штурма-Леувилля.Сущность всех собств.изменений задач Ш-Л наз.спектром этой задачи. Найдём собств.изменение:  1):  X(x)+;Подставив получ.решение получим:  2);X(x)=  *3);* X(x)=;;  =0;  *;*  *0;=*  *;;=;Решение з-чи Ш-Л* | **23. Физические задачи, которые приводят к уравнениям гиперболического типа. Колебания струны**  Задачи, приводящие к уравнениям гиперболического типа. Уравнения с частными производными 2-го порядка гиперболического типа наиболее часто встречаются в физических задачах, связанных с процессами колебаний. Простейшее уравнение гиперболического типа  называется волновым уравнением. К исследованию этого уравнения приводит рассмотрение процессов поперечных колебаний струны, продольных колебаний стержня, электрических колебаний в проводе, крутильных колебаний вала, колебаний газа и т.д. Уравнение колебаний струны. В математической физике под струной понимают гибкую, упругую нить. Напряжения, возникающие в струне в любой момент времени, направлены по касательной к ее профилю. Пусть струна длины l в начальный момент направлена по отрезку оси Оx от 0 до l . Предположим, что концы струны закреплены в точках x=0 и x=l . Если струну отклонить от ее первоначального положения, а потом предоставить самой себе или, не отклоняя струны, придать в начальный момент ее точкам некоторую скорость, или отклонить струну и придать ее точкам некоторую скорость, то точки струны будут совершать движения – говорят, что струна начнет колебаться. Задача заключается в определении формы струны в любой момент времени и определении закона движения каждой точки струны в зависимости от времени. Будем рассматривать малые отклонения точек струны от начального положения. В силу этого можно предполагать, что движение точек струны происходит перпендикулярно оси Ox и в одной плоскости. При этом предположении процесс колебания струны описывается одной функцией u(x,t) , которая дает величину перемещения точки струны с абсциссой x в момент t. Так как мы рассматриваем малые отклонения струны в плоскости (x,u) , то будем предполагать, что длина элемента струны равняется ее проекции на ось Ox, т.е. . Также будем предполагать, что натяжение во всех точках струны одинаковое; обозначим его через Т. Рассмотрим элемент струны MM’ .На концах этого элемента, по касательным к струне, действуют силы Т. Пусть касательные образуют с осью Ox углы . Тогда проекция на ось Ou сил, действующих на элемент MM’ , будет равна . Так как угол мал, то можно положить , и мы будем иметь:  (здесь мы применили теорему Лагранжа к выражению, стоящему в квадратных скобках). Чтобы получить уравнение движения, нужно внешние силы, приложенные к элементу, приравнять силе инерции. Пусть ρ - линейная плотность струны. Тогда масса элемента струны будет ρ . Ускорение элемента равно . Следовательно, по принципу Даламбера будем иметь: ρ .Сокращая на и обозначая , получаем уравнение движения (1).Это и есть волновое уравнение – уравнение колебаний струны. Для полного определения движения струны одного уравнения (1) недостаточно. Искомая функция u(x,t) должна удовлетворять еще граничным условиям, указывающим, что делается на концах струны (x=0, x=l) , и начальным условиям, описывающим состояние струны в начальный момент (t = 0). Совокупность граничных и начальных условий называется краевыми условиями. Пусть, например, как мы предполагали, концы струны при x=0 и x=l неподвижны. Тогда при любом t должны выполнятся равенства: u(0,t)=0 (2’) и u(l,t)=0 (2’’).Эти равенства являются граничными условиями для нашей задачи. В начальный момент t = 0 струна имеет определенную форму, которую мы ей придали. Пусть эта форма определяется функцией f (x). Таким образом, должно быть u(x,0)=u (3’).Далее, в начальный момент должна быть задана скорость в каждой точке струны, которая определяется функцией . Таким образом, должно быть (3’’).Условия (3’) и (3’’) являются начальными условиями.  Замечание. В частности, может быть f(x) . Если же f(x) , то струна будет находится в покое, следовательно, u(x,t) .  **29. Уравнение колебаний в ограниченной области**  Рассмотрим струну длиной l c закреплёнными концами. Задача сводится к нахождению реш-я ур-я , t>0, 0<x<l (1), , =, 0<=x<=l (2), , t>=0 (3), . Общее решение ур-я Даламбера: u(t,x)=. Однако определение ф-ций по (5) в соответствии с физ. смыслом возможно только на интервале (0;l). В это время, когда аргумент x-at, x+at могут нах. вне этого промежутка. Необходимо найти ф-ции на интервале (0;l). С физ. т з такое продолжение сводится к нах. нач. возбуждения бесконечн. струны, при котором дв-е её участка вдоль lбыло таким же, если бы она была закреплена в точках x=0, y=l. Осталось колебание струны, др. части отброшены. Для продолжения ф-ций воспользуемся гр. усл. (3). Тогда из (4) получим: , , . Если х изменяется на интервале (0,l), то 1ое соотношение в (6) опр-ет ф-ю на интервале (0,l), 2ое опр-ет ф-ю на интервале (0,l). Т о обе ф-ции полностью определены на числовом промежутке 2l. Потом из (6): , что означает, что ф-ции явл. 2l- периодическими. тоже 2l- периодические. Продолжение на всю числовую прямую происходит след. образом: сначала из интервала [0,l] идёт продолжение на [-l,0] по з-ну нечётности, а затем периодически с периодом 2l из интервала [-l,l] на всю числовую прямую. Можем воспользоваться формой Даламбера и подставить туда эти продолжения. | **24. Физические задачи, которые приводят к уравнениям гиперболического типа. Колебания мембраны. Поперечные колебания мембраны.**  Мембранной называется плоская пленка, не сопротивляющаяся изгибу и сдвигу. Рассмотрим мембрану, натянутую на плоский контур С. Будем изучать поперечные колебания мембраны, в которых смещение перпендикулярно к плоскости мембраны. Пусть ds – элемент дуги некоторого контура, взятого на поверхности мембраны и проходящего через точку М(x,y). На этот элемент действует натяжение , равное Tds. Вектор Tвследствие отсутствия сопротивления изгибу и сдвигу лежит в касательной плоскости к мгновенной поверхности мембраны и перпендикулярен к элементу ds.Можно показать, что отсутствие сопротивления сдвигу приводит к тому, что величина натяжения не зависит от направления элемента ds, так что вектор натяжения T=T(x,y,z) является функцией x,y,t. Эти свойства вектора Tслужат математическим выражение отсутствия сопротивления изгибу и сдвигу. Будем изучать малые колебания мембраны , пренебрегая квадратами первых производных и , где функция U(x,y,t) определяет форму мембраны в момент времени t. Из этого следует , что (x,y,t)- проекция натяжения на плоскость (x,y)- равна абсолютной величине натяжения. В самом деле , при любой ориентации дуги dsугол между вектором Tи плоскостью (x,y) не превосходит угла , образуемого нормалью к поверхности мембраны в точке (x,y)с осью z. Поэтому, ≥= 1, т.е. и . Вертикальная составляющая натяжения . Площадь какого-либо элемента мембраны в момент времени tравна . Следовательно в процессе колебаний не происходит растяжения , откуда в силу закона Гука вытекает независимость натяжений от времени . Уравнение колебаний мембраны в интегральной форме:  , где r(x,y)- поверхностная плотность мембраны, а F(x,y,t)- плотность внешней силы(на еденицу площади).  Или .  Уравнение колебаний в дифференциальной форме:  Для однородной мембраны:  , где и f(x,y,t) –плотность силы, рассчитанная на единицу массы мембраны.  **27. Уравнение колебаний на бесконечной прямой**  Ур-е свободно колеблющейся струны: = (1). , x-at=const и x+at=const – хар-киур-я (1). Выполним в (1) замену: =x+at (2). С помощью (2) ур-е (1) приведём к виду: Его общим решением будет: u( где -произвольные дост. гладкие функции. Выполнив обратную замену, получим: u(t, x)= (3)-общее решение, решение Даламбера. Метод решения Даламбера наз. методом характеристик. Подставим задачу коши для ур-я u|t=0=|t=0=. В данном случае х изменяется на всей числовой R. Поскольку (3) есть общее р-е (1), то для решения задачи Коши необх. из (3) выделить частное, удовлетворяющее (4). (5a), и подставив t=0, получим: -a, откуда разделив на а и проинтегрировав (5б). Для нах. неизвестной функции составим систему: и (5) и (6). (6) подставим в (3) u(t, x)=u(t, x)= (7)-выражает решение задачи Коши (1-4) если дважды непрерывно дифференцирована. Доказательство решения задачи Коши наз. формулой Даламбера. Примечание: формула (7) получена для колебаний струны.  **30. Единственность решения волнового уравнения.**  Рассм. волновое ур-е: =a^2 , t>0, 0<x<l; реш-е которого удовл. нач. и граничным усл: =g1(x), , 0<=x<=l (2), (3). Пусть Т-нек. положит.число, а u1 иu2-смешанная задача (1,2,3) в прямоугольнике [0,T]x[0,l]. Введём в рассмотрение ф-ю v=u1-u2. Для единственности реш-я поставленной задачи дост-но док-ть, что v. Умножим ур-е (1) на . , 0<t<T, 0<x<l, [. Последнее проинт-ем по прямоугольнику [0,l]x[0,t]:[, = (4). Первые 2 интегралла в (4) представляют разность полн. энергии в мом. вр-ни t. След. 2 интеграла –работа y-составляющей части силы растяжения на концах струны, правая часть-работа силы F. Ф-я v будет реш-ем этой же задачи при F. , -озн. что если струна не имеет энергии в мом. вр-ни t, то она не имеет и далее без возд-я внешн. сил. Если подъинтегр. ф-я непрерывная, то зн-е инт. будет положит-но, что противоречит (5). Т о подъинт. ф-я тожд-но равна нулю v(t1,x)=const, v(t,0)=0, v(t,x)=0, v(t,x). В силу произвольности выбора точки t1, v(t,x)ghb. Т о реш-е волнового ур-я (1) с краевыми усл (2,3) единственно. |
| **31. Постановка задачи Коши для уравнений с частными производными. Теорема С. Ковалевской.**  Рассм.сист.ур-ний относит.неизв.ф-ции u₁,u₂,…относит.неизвест.перем.t,,,…;=(t,,,…,…,)–(4) i,j=1,2,…,n;++…+Из(4)вытекает что для каждой неизв.ф-ции сущ.свой порядок произв.этой ф-ции.Независим.перемен.t играет главную роль среди других независ.переменных.Во первых:среди произв.высшего порядка от каждой ф-ции что вх. В задание с-мы(4),должна изм.произв.котрая стоит в левой части(4).Во-вторых-систю(4)выражена отн.этих произв.При некотором зн. t= зададим нач.знач.неизв.ф-ции произв.по t по порядку =1. Пусть при t=:=(,,…)-(5);k=0,1,..,;i=0,1,…,n.Сист.что ф-ция задаётся в области С пространства ,,… привет пр-о нулевого порядка от ф-ции бкдем считать …ф-цию.Задачи коши заключ. В нахожд.решения сист(4) при нач.усл (5).Т-ма С Ковалевского:пусть начальные данные Коши (4),(5).Обозначим произв.ф-циив некотором пункте,…,); =; i=1,2,…,n; +.Т-ма1(Ковалевского):когда ф-ция аналитична в некот. Окрестности пункта(,,,)и ф-цияаналит.в окрестности пункта(,)то задача Коши(4-5)имеет аналит решение в некоторой окрестности пункта(,)и при этом решение единства в классе анал.ф-ций | **33. Общая схема метода Фурье для уравнений гиперболического типа.**  *(P(x))-g(x)u*-(14);t;0;u(t,x)=T(t)\*X(x)-(17)  Когда подставим17в14 то==-  ++  ++(20);Опр1:Значение параметра при котор.сущ.нетривиальное знач.наз.собств.знач. Из однородной у-ния 19 и ур-ния 20 вытекает что собств ф-ции опред.с точностью до последующего мн-ва окажется ортогональн.собств.ф-цией соотв.собств.зн.;;  (p(x))+=0;  +=0;  ()(x)+()(x)(x)(21)  Из физ.сообр.пар-ры ур-ния 14 таковы что p(x)0,a(x)  поэтому под интегральная ф-цияв(21)не отриц.  (t,x)=()(x)-(22)N  Удовл.усл.(14) и гран.усл.(15)  U(t,x)=(23)  (x)=  (x)=  =  = | **35. Вынужд-е колеб-я струны, закреплённой на концах.**  Задача о нахождении вынужденных колебаний однородной струны жестко закрепленной на концах 0<x<l, под действием внешней силы p(x,t) с плотностью приводится к решению уравнения  (1)  (g=p/q, где q линейная плотность струны ) при граничных условиях (2)  и нач усл-х (3)  Решение задачи (1), (2), (3) ищут в виде суммы u=v+w, где v - решение неоднородного уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям (2) и нулевым начальным условиям ,а w - есть решение однородного уравнения (1), удовлетворяющее условиям (3) и (2).  Решение v представляет вынужденные колебания струны , (эти колебания совершаются под действием внешней возмущающей силы при отсутствии начальных возмущений), а решение w представляет свободные колебания струны (они обусловлены начальными возмущениями).  Ф-цию v ищем в виде ряд (4)  по собственным функциям задачи (6)–(7).  Подставляя (4) в (1), получаем  (5)  Разлагая функцию в интервале [0,l] в ряд Фурье по синусам (6)  и сравнивая (5) и (6), находим дифференциальные уравнения (7)  где  Решая уравнение (7) при нулевых начальных условиях (8)  находим, , а затем определяем v с помощью формулы (4). Заметим, что решение уравнений (7) при условиях (8) можно представить в виде (9)  Решение задачи (1), (2), (3) представляется в вид u где функции определяются формулой (9), а коэффициенты формулами Фурье:  *,* | **36.Вынужденные колебания струны с подвижными концами. Неоднородное гиперболическое уравнение.**  Рассмотрим вынужденные колебания однородной струны длины l под действием внешней силы f (x,t), рассчитанной на единицу длины, причём концы струны не закреплены, а двигаются по заданному закону. Эта задача приводится к решению уравнения:  , t>0, 0<x<l (1)  При граничных условиях: (2)  И начальных условиях: (3)  Эта задача сводиться к задаче с нулевыми (однородными) граничными условиями. Введём вспомогательную функцию:  Таким образом, функция ω(x,t) на концах отрезка 0 ≤ x ≤ l удовлетворяет условиям (2), а внутри отрезка она линейна по Х.  Решение задачи 1-3 ищем в виде суммы: u(x,t)= (x,t)-новая неизв. функц.  Функция v = u −ω удовлетворяет нулевым граничным условиям:    и начальным условиям: (x), ==(x). Подставив u = v +ω в уравнение (1), получим:  или, учитывая выражение для ω(x,t):Где  Таким образом, при ψ1(t),ψ2(t)∈C2, приходим к смешанной задаче с нулевыми граничными функции v(x,t). |
| **37. Частные решения волнового уравнения. Метод усреднения**. Найдём частные решения уравнения  Где:  u=u(t,M), M, M(x,y,z)  В некоторой точне Мо перейдёс от текартовых к сферическим координатам с центром в точке Мо  u(t,M)=u(t,ρ) (2)  , ρ=|M.Поэтому уравнение (1) в сферических координатах примет вид:  (3) . Введём новую функцию: u(t,ρ)=ρ u(t,ρ). (4)  Подставим (4) в (3): . (5)  Рассмотрим задачу Коши: u(0,ρ)=  Из (6) согл. (4) получим начальные условия на функции V: . В итоге получим краевые условия:  (5) и (7) задача о колебаниях полубесконечной струне закреплённой с обеих концов.Длё её решения воспользуемся реш. Даламбера: Следовательно согласно (4) функция u(t,ρ) . Будет общим решением уравнения (3). А значит уравнение (1). Частное решение: ;  . | **38. Метод спуска. Метод отображения.**  Что бы получить решение двумерного волнового уравнения ). (1) Воспользуемся методом спуска Адамара. Пусть U решение волнового уравнения (1) u (2).  Решение задачи коши можно вычислить по формуле Пуассона при этом интегралы которые берутся по сферам необходимо преобразовать в интегралы по кругам на плоск. оху .Пусть М точка сферы N1 ей проекция на ось оху. Тогда cos (n,z)=. с учётом этого формула Пуассона примет вид:  u(t,x,y)=+).(3)  Решение волнового уравнения (1) с начальными данными (2).  Смешанную задачу для волнового уравнения можно решить методом отражения. Найти решение уравнения  ). (4) с нач. условиями: u, . (5)  И ган. Условиями (6) Для решения задачи можно воспользоваться функцией Пуассона. | **39. Формула Кирхгофа – Соболева**  Киргофова формула. в виде u(x,t)=tψ]+t  для волнового уравнения (1)  примечательна тем, что из нее следует Гюйгенса принцип:решение (волна) и( х, t )уравнения (1) в точке ( х, t )пространства независимых переменных х 1, х 2, х 3, t вполне определяется значениями j, дj/дп и y на сфере |у-x|= t с центром в точке хи радиуса |t|. Пусть дано уравнение нормально гиперболического типа . (2)  с достаточно гладкими в нек-рой (т+1)-мерной области Wm+1 коэффициентами aij(x), bj (х), с (х)и правой частью f(x), т. е. уравнение, форма к-рого в любой точке xОWm+1 с помощью невырожденного линейного преобразования приводится к виду  К. ф. обобщена на уравнение (2) в случае, когда число m+1 независимых переменных х 1, ..., х т+1 четно [4]. При этом существенным моментом было построение функции j, обобщающей на случай уравнения (2) ньютоновский потенциал 1/r. Для частного случая уравнения (2) . (3)  обобщенная К. ф. принимает вид  u(y,t)= . (4)  где у - некоторое положительное число, а - кусочно гладкая граница m-мерной ограниченной области Wm, содержащей внутри себя точку у, п- внешняя нормаль к а;  Формулу(4) для уравнения (2) иногда наз. формулой Кирхгофа – Соболева. | **40. Задачи с данными на характеристиках.**  Понятие характеристик для уравнения позволяет найти существенно новое явление описываемое этим процессом. Рассмотрим уравнение: . (1)  Уравнение характер. имеет вид: значит в левой части уравнения (1) диффер. прошло вдоль характер.Поэтому (1) можно записать в виде где r- искомая характеристика. Поэтому вдоль этой характер. Функция принимает постоянные значения. Рассмотрим задачу Коши uЕсли фи имеет вид  ,  то на участке [0;X1] характер. Будет расходиться так как угловые коэффициенты растут, а на участке (Х1 Х2) характер. Сходиться т.к. угловой коэффициент убывает с ростом Х,а значит характеристики пересекутся в некоторой точке (t0 x0). Однако функция U на каждом характер. примет своё постоянное значение .Поэтому в точке пересечения (t0 x0) иметься 2а значения U чего быть не может. Поэтому в этой точке частная производная уходит в бесконечность. |
| **41. Метод Римана решения задачи Коши для гиперболического уравнения на плоскости.**  Пусть Gобозначает треугольную область, ограниченную характеристиками ε=и 𝝶=и отрезком гладкой кривой . Для определенности считаем , что кривая ∑ проходит через точки () и (). Предполагаем что кривая ∑ нигде не касается характеристик , т.е. <0, 0≤𝝽≤ . Поставим задачу Коши для уравнения в области G. Найти функцию U(x,y), Uϵ, , удовлетворяющих уравнению Lu=+a(1) вGи данным Коши на ∑ :.  Теорема: Если ∑-кривая класса , функции a,b,c,принадлежат С(), fϵC(), и ]ϵ, то решение задачи Коши существует, единственно и выражается формулой Римана  U(x,y)= , где - части области Gи кривой ∑, лежащие между характеристиками 𝝽=xи 𝝶=y ; y=𝞂(, .  Отметим некоторые качественные следствия , вытекающие из формулы Римана. Из этой формулы видно, что решение задачи Коши в точке (x,y) полностью определяется значениями данных f,в замкнутой треугольной области -области зависимости точки (x,y). Поэтому если эти данные изменять вне фиксированной области( с соблюдением надлежащих свойств гладкости), то т решение будет меняться лишь вне этой области. Таким образом , мы приходим к следующему выводу: к данному решению задачи Коши зафиксированному в области , можно присоединить вдоль характеристик 𝝽=x\* и 𝝶=y\*, вообще говоря , различные решения, являющиеся его продолжением. | **42.Уравнение распространения тепла.**  Пусть функция u(t,x) определяет поле температур в точке x(x1, x2,x3) в момент времени t. Будем считать среду изотропной. Обозначим ρ(x), c(x), k(x) ей плотность, теплопроводность и коэффициент теплопроводности в точке x соответственно. Пусть F(t,x) – интенсивность источников тепла в точке x в момент времени t. Выделим некоторый объём V и подсчитаем баланс тепла за промежуток времени (t;t+t). Пусть S- граница объёма V, -внешняя нормаль к этой границе. Соответственно закону Фурье, через поверхность S в объём V поступает количество тепла:  От тепловых источников выделяется количество тепла в объём V.  Для этого изменения температуры необходимо затратить количество тепла:  По закону сохранения энергии:  Откуда в силу произвольности выбора объёма V получаем равенство подынтегральной функции:  , которое относится к параболическому типу. В случае, когда среда однородная, параметры c, ρ и k – постоянные:  Где , . Это уравнение теплопроводности. При выводе уравнения теплопроводности рассматривали пространственный случай, когда количество пространственных переменных равно 3. Вообще говоря, их в уравнении теплопроводности может быть сколько угодно. | **43.Уравнение диффузии газов.**  Если среда неравномерно заполнена газом, то происходит его диффузия с места с более высокой концентрацией в место с более низкой. Такое же явление наблюдается и в растворах, когда концентрация растворенного вещества в объёме непостоянная. Рассмотрим процесс диффузии газов в полой трубке, наполненной пористой средой. Считаем, что в любой момент времени концентрация вещества по поперечному сечению трубки одинаковая, тогда процесс диффузии может быть описан функцией u(t,x), которая представляет концентрацию в сечении трубки x в момент времени t.Согласно закону Нернста, масса газа, протекающего через сечение x трубки за промежуток времени (t;t+) равна:  Здесь D- коэффициент диффузии, S-площадь поперечного сечения трубки, W-плотность диффузионного потока, равная массе газа, протекающей в единицу времени, через единицу площади. Исходя из определения концентрации, масса газа в некотором объёме V равна:  Отсюда получаем, что изменение массы газа на участке трубки (x1, x2) при изменении концентрации на равно:  Здесь c(x)- коэффициент пористости.  **Определение 1:** Коэффициентом пористости называется отношение объёма пор ко всему объёму.  Составим уравнение баланса массы газа на участке трубки (x1, x2) за промежуток времени (t1,t2).  Учитывая произвольность выбора промежутка времени , и куска трубки , из последнего равенства получаем равенство подынтегральных функций:  Это уравнение называется уравнением диффузии. Его вывод осуществляется при условии, что в трубке отсутствуют источники вещества, и диффузия через стенки трубки отсутствует. Учёт этих условий приводит к более сложному уравнению. | **44**.**Постановка краевых задач для уравнений параболического типа.**  Для выделения единственного решения уравнения необходимо к уравнению присоединить начальные и граничные условия. Начальное условие в отличии от уравнений гиперболического типа состоит лишь в задании значений функции в начальный момент времени . Граничные условия могу быть различны в зависимости от температурного режима на границах. Рассматривают три основных тппа граничных условий:  1.На конце стержня задана температура  , где – функция, заданная в промежутке, причём есть промежуток времени, в течении которого изучается процесс.  2.На конце задано значение производной  . К этому условию мы приходим, если задана величина теплого потока , протекающего через торцевое сечение стержня,  *,* откуда , где - известная функция, выражающаяся через поток через заданный поток по формуле .  3.На конце задано линейное соотношение между производной и функцией  . Это граничное условие соответствует теплообмену по закону Ньютона на поверхности тела с окружающей средой, температура которой θ известна. Пользуясь двумя выражениями для теплового потока, вытекающего через сечение  получим:  , . Получаем математическую формулировку третьего граничного условия в виде:  , где - коэффициент теплообмена, - некоторая заданная функция. Для конца стержня третье граничное условие имеет вид: .  Граничные условия при и могут быть разных типов, так что число различных задач велико. |
| **45. Уравнение теплопроводности в ограниченной области. Принцип максимума для уравнения теплопроводности. Единственность и устойчивость решения.**  Уравнение теплопроводности для однородного стержня имеет вид:  Здесь – постоянная, называемая коэффициентом температуропроводности;  – коэффициент теплообмена с окружающей средой через боковую поверхность;  ,.  Если теплообмен с окружающей средой через боковую поверхность отсутствует, т.е. , то уравнение приводится к виду  **,** называющимся одномерным уравнением теплопроводности.  **Принцип максимума**. Всякое классическое решение u(x,t) (непрерывное в замкнутой области  ) уравнения  . (1)  принимает наибольшее и наименьшее значения, либо в начальный момент времени , либо на границе отрезка ,.  Доказательство. 1. Если , то справедливость теоремы очевидна.  2. Пусть  =max{, ,},  =max u(x,t), =u(,). x[0,l], t[o,T].  Покажем что . Предположим противное: . Рассмотрим вспомогательную функцию  , где.  Функция непрерывна в D и следовательно, достигает в D наибольшего значения в некоторой точке (,), так как  =  Точка (,) не может лежать на границе, так как  ++-+(T-t)+-+(T-t)+-  Таким образом точка (,) и в ней функция должна удовлетворять уравнению (1). Но, так как (,) – точка максимума, то  Поскольку  и, следовательно, в точке функция не удовлетворяет уравнению (1). Следовательно предположение не верно, т.е. , что и требовалось доказать. Доказательство для минимума аналогично.  **Единственность решения**. Классическое решение смешанной задачи с краевыми условиями первого рода ( непрерывное в области )  , (2)  , , (3)  единственно.  Доказательство. Пусть и -два типа решения задачи (2),(3). Пусть Тога  .  Это решение непрерывно и достигает наибольшего и наименьшего значения на границе. Следовательно, , что и доказывает теорему. | **46. Метод разделения переменных для уравнения параболического типа. Функция источника.**  Рассмотрим первую краевую задачу для ур-ния теплопроводности, найти первую в полосе  П=[0;+∞)\*[0;l]ф-цию И-удовлетворяющую П=(0;+∞)\*(0;l)  Удовлетворяющую ур-нию: dU/dt=а2\*d2U/dx2 (1.)  И│t=0=f(x),~~V~~(x)€[0;l] (2.)  И│x=0=И│х=е=0 ~~V~~€[0;+ ∞) (3.)  Для сущ. и единственности решения, потребуем, чтобы, выполнялось условие гладкости ф-цииf,- имеет, кусочно-непрерывную производную на отрезке [0.l] и условие согласованности:  f(0)=f(l)=0  Решение поставленной задачи найдем методам Фурье с этой целью, нетривиальное решение ур-ния (1.) удовлетворяет граничным условием (3) будем искать в виде: И(t,x)=T(t)X(x) (4.)  Подставим (4)в ур-ние (1)и разделим переменные:  Tʹ/aT=Xʹʹ/X=- λ=const  Левая зависит от Т, а правая от Х. В итоге получим , два обыкновенные дифф. Ур-ния :Тʹ+λа2Т=0 (5.),Х+λХ=0 (6.) из того, что (4.) удовлетворяет граничным условием (3.) получим граничное условие:  Х(0)=0, Х(l)=0 (7.)т.о для ф-ции Х получение задачи Штурма-Ляувиляимеющую спектр λn и Хn:  Λn=(πn/е)2, Хn(x)=sinπnx/е, n€N  При найденном спектре ур-ния (5) :Т,,+(πna/е)2\*Т=0, это ур-нение с разделяющимися переменными: Тn(t)=Anℓ(-πna/е)t, где Аn-производнаяпостоянная .т.о согласно (4) ф-ции : Иn(t,x)=Anℓ(-πna/е)t\*sin πnx/е, ~~V~~n €N. Решние задачи (2) при t=0: f(x)=∑ Ansin πnx/е  An=2/ℓ∫f(x)sin πnx/еdx, ~~V~~n €N (9), В силу признака сравнения сходится абсолютно и равномерно, а значит представляет собой классическое решение подставленной задачи.  Ф-цияисточника.Введем обозначение: G(t,x,ᶘ)=2/е∑ℓ(-πna/е)tsin πnᶘ/е \* sin πnx/е, И- краевая задача: И(t,x)=∫G(t,x,ᶘ) f(ᶘ)dᶘ,G-ф-ция мгновенного источника. Количество тепла: Q=cρ∫fᶘ(ᶘ)dᶘ  Температура: Иᶘ(t,x)=G(t,x,ᶘ\*)∫fᶘ(ᶘ)dᶘ=G(t,x,ᶘ\*)\*Q/cρ  limИᶘ(t,x)=limG(t,x,ᶘ\*) Q/cρ= Q/cρ\*G(t,x,ᶘ)-последнее равенство означает , что G–температура в точке х в момент времени t. | **47. Уравнение теплопроводности на бесконечной прямой.**  **П1**. Подстановка и решение задач Коши. Рассмотрим след. Задачу Коши найти ф-циюИ(t,x)G=(0;+∞)\*Rудовлетворяет ур-нению теплопроводности: dU/dt=а2\*d2U/dx2 (1.),И(0,х)=f(x), ~~V~~x€R(2.  докажем единственность решения задачи Коши (1.2) при условии что решение У ограничено в области G. Ф-ция будет удовлетворять ур-нию (1) и однородному нач. условию: И(t,x)=0. Область Gявл. Не ограниченнойG1=[0;T]\*[-L;L] L,T- некоторые фиксированные числа. G1-ограниченна. Рассмотрим вспомогательному ф-цию:  V(t,x)=ИМ/L2(x2/2+a2t),v-явл. решением ур-ния теплопроводности. V(0;x)=ИМх2/2L2≥0=и͠(0.х), V(t,±L)=LM/L2(L2/2+a2t)=4M/L2\*L2/2+4Ma2t/L2≥2M≥И͠(t:L)поскольку , G ограничено то можем преминить теорему о мах и мин ф-циямv+и͠, v-и͠ тогда получаем:~~V~~(t,x)€ и͠(t,x)≤v(t,x)=иМ/R2(x2/2+at)  **П.2** решение задачи Коши для теплопроводности.  Ŧ[∂и/∂t]=a2 Ŧ[∂2и/∂х2], Ŧ[и(0.х)]= Ŧ[f], И= Ŧ[и], F= Ŧ[f]решение задачи (1,2):  и(t,x)= (x-ᶘ)2/4a2tdᶘ  F(t,x)=\* (x-ᶘ)2/4a2t –фундаментальное решение теплопроводности.  **49. Теплопроводность в полу бесконечном пространстве.**  Рассмотрим интеграл. Преобразование Лапласа на примере температуры поля жидкости расположенной в результате с теплоизолированной боковой поверхностью с постоянной температурой **И0** и нулевой температуре начальной среды: dU/dt=а2\*d2U/dx2 (6.) , Их(t.0)-И(t,0)=0 (7.) И(0,х)=И0 (8.) Для решения данной задачи используем интеграл преобразование по переменной **р.** После преобразования Лапласа по аргументу**t**, где**И** Лаплас образ.  Иˡˡ=S \*И(х)-И0 , Иˡ(0)=И(0), И=J[и], Иˡˡ=s И(х)-И0(9.), Иˡ(0)=И(0)(10.**)-** в результате получили граничную задачу для обыкновенной дифф. ур-ния второго порядка с постоянным коэффициентом , а ур-ние (9.) имеет вид :  И(х)=С е√s+C2 е-√sx+И/S (11.),  по свойству интеграл ф-цияИ должна быть ограничена на бесконечность необходимо положить С=0 , при данных С граничное условие (10.) принимает вид: -С2(1+√s)=И/s↔C2=-И/S(1+√s), И(х)=И0((1/s-ℓ-√sx)/s√s+1) (12.)- решение для граничной задачи.  Чтобы получить решения исходной задачи (6.)(7.)(8.) достаточно ф-ции И получим:  И(t,x)-J-1[И]-J-1И0(1/s-ℓ-√sx/s(√s+1))=  И0-И0(еrfc(x/2√t)+erfc(√t+x/2√t)ℓx+t) | **48. Уравнение теплопроводности на полу бесконечной прямой.**  Решение задачи диффузии на полу прямой , метод синус преобразования Фурье. Рассмотрим смешенную задачу:  dU/dt=а2\*d2U/dx2 (1.), И(t;0)=А1(2.), И(0;х)=0 (3.)  Внутри постоянное вещество отсутствует. Сверху постоянная равна А.  Для решения данной задачи воспользуемся синус преобразования Фурье, при этом считаем, что И: И=Ŧ[и], учитывая св-ва синус преобразования производных результатом интеграл преобразования ур-ния (1) будет обыкновенное интегральное ур-ние: Иˡ=а2(-w2И+2Аw/π) (4.), И(0)=0 (5.)  Изменение нач.данным (3.), будут нач . данные И0=0 .  В итоге получим задачу Коши для обыкновенного дифф. ур-ния 1-ого порядка. Решим задачу методам мат. вариаций получим: И (t)=2А/πw(1-ℓ-w2а2t).  Чтобы получить решение исходной задачи тоесть восстановить ф-цию И достаточно И применяется обратное синус преобразования Фурье. В результате получим:  И(t,x)=Γ2[и]=А erfc(x/2a)  erfc(x)= ∫ℓt2dt  **50. Понятие обобщённого решения для уравнения с частными производными.**  **П1.**Основные ф-ции. Пусть множество Ω отсутствует: Опр1: Ф-цияf(x)не=0, ~~V~~х€Ω; f(x)=0, ~~V~~x€Rn- Ω-наз.финитной. Замкнутое множество Ω наз.  Финитной множества f: Ω=Suppf .  fxесли выполняются след. условие:   1. Fk(x)→f(x) 2. DJf0(x)→DJf(x) , DJ=dJ/dxJ,dx2....dxnJn 3. Сущ. ограниченное множество :ΩᴄRn,Suppf\*ᴄΩ,~~V~~kᴄN, SuupfᴄΩ   Пространство D, Rncуказанной сход.будет наз. с пространством основных ф-ций.  **П.2** понятие обобщённых ф-ций .  Рассмотрим некоторую линейную ф-циюf действующую f€D (Rn) f-линейный ф-онал.  **П.3** Регулярные обобщенные ф-ции .  Рассмотрим, произвольную, интегрируемую ф-циюg. На её основании постоим, линейный ф-нал g€Dˡ(Rn)  (g,f)= ∫g(x)f(x)dxпроверим условия непрерывности функционала: Придельный переход под знаком интеграла возможен в **силу равномерной сходимости, последовательностей f.**  **П4.** Фундамент решения дифф.ур-ния.  Рассмотрим произвольноеур-ние порядка n:  Σa(x)DJИ=f (3)  Длялюбой ф-цииfиз пространства основных ф-ции  L[И]=Σа(х) D  L\*[v]=Σ(-1)J(-1J)DJ(a(x)v),  если в качестве первой части взять ур-ние Дирака, то получим L[и]=δΧ  Естественно, что обобщённая ф-ция оператора обозначается не однозначно. Учитывая прикладной характер ур-нения . |
| **51. Уравнение Лапласа. Формулы Грина.**  **П.1.**Ур-ние Лапласа.  Введем n- мерный оператор Лапласа: Аn=d2/dx2+d2/dx22+.....+ d/dxn2, И=0,  Оно приводится к эллиптическому типу и описывает различного рода стационарные процессы: форму мембраны устоявшееся поле температур, потенциал поля притяжения.  Ур-ниеПуассона. **Опред.1.**Ф-ция И наз. Ограниченной области Ω если она в этой области имеет непрерывные производные до 2-ого порядка включительно и удовлетворяют ур-нию Лапласа во всех областях Ω.  **Опр.2.** И(М)→0  И(x,y,z)= (3.)  М0()-не является решением.  Ф-ция наз. Фундаментальным решением трехмерной  ур-нияЛапласа. Ф-ция  И(x,y)=  Удовлетворяет, двухмерномуур-нию Лапласа и наз. Фундаментальным решением двумерного ур-ния Лапласа.  **П2.** Формула Грина. Ф-ла Грина, выводится на основании ,ф-лы Остроградского связаны тройные и поверхностные интегралы. ΩᴄR3ограничена кусочно-гладкой ориентированной поверхности S и пусть р, g, R имеет w:  ∫∫∫()dV=∫∫Pcos(n˄,x)+Qcos(n˄,y)+Rcos(n˄,z)ds  В формуле Остроградского положим:  P=и; Q= и;R= и;тогда:  ∫∫иds-∫∫∫и - первая ф-ла Грина.  ∫∫∫(и)=∫∫(u)ds- вторая ф-ла Грина.  Заметим, что первая и вторая ф-ла Грина, могут быль применены и тогда когда Ω ограничена несколькими замкнутыми областями в этом случае поверхность интегрирована необходимо брать по всем областям ограниченным Ω.  Лемма. Пусть ф-ция и непрерывна и имеет непрерывные производные 1-ого порядка на области Ω и непрерывны вплоть до ее границеS:  u()=-  r=0ǀ, M0()- лежащий в области Ω.  n- внешняя нормаль поверхностиS.  Вначале предложим, что ф-ция И имеет непрерывная производная 2-ого порядка на границе S.  dv=- | **52. Общие особенности гармонических функций.**  Будем исходить из формулы Гаусса-Остроградского  .(1)  Справедливой для кусочно-гладкой поверхности Σ , ограничивающей область Ω. - векторное поле, - вектор нормали к поверхности Σ.  Пусть функции u и v имеют непрерывные вторые производные в Ω и непрерывны вместе с первыми производными в ее замыкании .  Положим , тогда: ; div .  Где .  Поэтому из формулы (1) с учетом получим : . (2).  Это - первая формула Грина.  Меняя в формуле (2) u и v местами, получим : . (3). .  Вычитая равенства (2) и (3) почленно, находим : . (4).  Это - вторая формула Грина.  Наконец, полагая в (2) u = v, получим : . (5).  Это - третья формула Грина.  Здесь всюду - вектор внешней нормали к гладкой или кусочно-гладкой замкнутой поверхности Σ .  **Замечание:** Граница области Ω может состоять из нескольких замкнутых поверхностей. В этом случае поверхностные интегралы в правых частях формул Грина следует брать по всем поверхностям, ограничивающим область Ω.  **57.Объёмный потенциал**  U= +const, =-Ex , =-Ey , =-Ez , k=1. - потенциал электростатического поля ,поэтому постоянную считаем равную 0, т.о. точечный заряд величины q расположенный в точке а создаёт потенциал: U(M)== - (1) В случае же непрерывного распределения заряда по некот. объёму с плотностью распр. зарядов . Точное значение потенциала: U(M)= - (2); r=MN, N. Правая часть равенства (2) наз. Объёмным потенциалом или потенц. Объёма. (2)является непрерывной и имеет частные произв. любого порядка = = =0, т.е. функция U удовлетворяет уравнению Лапласа. Функция U является гармонической вне обл. . Свойство 1: Если плотность ограничена и интегрируема в области , то потенциал U и его частные производные 1-го порядка везде непрерывны и могут быть получены диф. Под знаком интеграла. Свойство 2: Если плотность непрерывна в обл. и имеет непрерыв. производ. 1-го порядка на обл. , то потенциал объёма (2) имеет непрер. производ. 2-го порядка на и удовлетворяет уравнению Пуассона: U=-f(M) имеет частные решения : U(M)= , r=MN. | **53. Внутренние краевые задачи для уравнения Пуассона. Единственность и устойчивость решения. Наружные краевые задачи для уравнения Лапласа.**  Внутренние краевые задачи:  Пусть S замкнутая поверхность ограничивающая конечную область Ω и пусть на S заданы непрерывные ф-цииf1,f2,f3. Ф-ция удовлетворяющая ур-ниюПуасона:  И=f(M), , непрерывнуюназамыканииΩ:=f2(p), pS, +a(P)u)s=f3(P)S , a(P)≻0  PES.  Единственность и устойчивость решения.  Единственность и устойчивость решения краевых задач вытекает, из теоремы об непрерывной зависимости решения от краевых условий. Например такая теорема в случае задачи Дирихле для ур-ния Лапласа .  Решение задачи Дирихле. **⃒**f1 (p)-f1∼(p)⃒≺, pS  ⃒u(M)-u∼(M)⃒≺, MΩ. Д-во:  ⃒u(M)-u∼(M)⃒≤ махΩ ⃒u(M)u∼(M)⃒≤  ⃒махsu(M)-u∼(M)⃒= махs⃒f1(P)-f1∼(P)⃒≺  Внешняя краевая задача.   1. Задача Дирихле: Иs=f1(P), pS 2. Задача Неймана: ⃒s=f2(P), pS 3. З-ча Дирихле-Неймана: +а(P))s= f3(P), pS   **56.Метод Фурье на цилиндрических областях для уравнения эллиптического типа.**  Для решения гранич. задач цилиндрической области методом Фурье рассмотрим задачу в цилиндрических координатах где ур. Лапласа примёт вид: - (1)  U()=U()Ф()Z(z) – (2). Представим (2)в(1) и разделим перем. :  + - (3). Z(z)=exp(mz), Z(z)=exp(-mz) – (4).  Фn/Ф=-n2 Знак «-» выбираем в связи с тем, что Ф должна быть периодической с периодом 2, тогда фунд. системой решения будет  Ф()=cos; Ф()=sin()–(5). + +(m2-) U=0 – (6)-уравнение Бесселя и его фунд. система решений имеет вид: U()=Jn() U()=Yn(). В итоге согласно (3) Unm()=(AnJn()+BnYn())\* \*(C1ncos +C2nsin)\*(C3mexp(mz)+C4mexp(-mz))–(7). Будем искать решение урав. (1) в области не содержащей нач. координат, чтобы (7) было ограничено при =0, необходимо потреб. Bn=0: Unm()= Jn(m)exp(-mz)(Anmcosn+Bnmsinn) nN0 , mN; exp(mz), поэтому потреб. C3m=0. Учитывая однородность (1): U()= Jn(m)exp(-mz)\*(Anmcosn+Bnmsinn), ) nN0, mN – общее решение неограниченной области. | **54. Метод Фурье на круговых областях для уравнения эллиптического типа.**  **Пример:**Задачи Дирихле на круге радиуса R. В полярных координатах такая задача ставится следующим образом: Найти ф-цию И зависящую от R,f, такую которая удовлетворяет ур-нию Лапласа:  ,  И на границе круга, принимает заданные значения: И=f(). Нетривиальное решение будем искать в виде: И()=И()\*F().  После того как подставим в ур-ние и разделим переменные получим: 2И’’+И’-ƛИ=0  F’’+ƛF=0, F(0)=F(2π).Получим задачу Штурма-Леувиля с периодическими условиями. Которая имеет спектр:  Fn()=Ancosn+Bnsinn, ƛn=n2, 0, при найденном спектре ур-ние принимает вид:  2 Иn’’+Иn’-n2Иn=0  Представим собой разложение ф-цииf в тригонометрический ряд Фурье: И()=А0+  F)=А0+  И его коэффициенты вычисляются по формулам.  А0=An=.  **55. Метод Фурье на прямоугольных областях для уравнения эллиптического типа.**  Рассмотрим следующую з-чу Дирихле:  И(а, y)=c,  И(x,c)=a,  Данная задача возникает при делении формы прямоугольной мембраны закрепленной по краю, где граничное условие определяет вид крепления мембраны.  **u**(x,y)=v(x,y)+w(x,y),  v(a,y)=0, V(k,y)=0, c≤y≤d :  v(x,c)= a,  w(x,c)=0, w(x,d)=0, w≤x≤b  v(x,y)= X(x)\*Y(y);  Y’’/Y=-X’’/X=ƛ=conct  Y(y)-ƛ Y(y)=0, X(x)+ƛX(x)=0.  Получаем граничное условие на ф-цию: X(a)=X(b)=0  Следовательно в качестве дифф. Системе ур-ний.  ch ; sh ;  Vn(x,y)=ch+sh)\*sh  Подставив получим:  F1(x)=ch+sh)\* sin;  F2(x)=ch+sh)\* sin;  Представляет собой разложение ф-цийf1bf2в тригонометрический ряд Фурье по синусам на отрезке (а,b)коэффициенты Фурье этого разложения находится по формулам:  Anch+sh=sin dx  Anch+sh=sin dx  В итоге при каждом фиксированном nполучим систему двух ур-ний с двумя неизвестными. |
| **58.Потенциал простого и удвоенного слоя.**  U(M)= r=, NS – (1). Правая часть (1) наз. потенциалом простого слоя. Замкнутую поверхность S наз. поверхностью Ляпунова, если выполняется след. условия:1) В каждой точке поверхности S существует касательная плотность;2)сущ. положительное число d>0 одинаковое для всех точек поверхности S; 3)Если острый угол образующий нормали к поверхности S в двух точках N1 и N2 и r12 – расстояние между этими двумя точками, то сущ. 2 таких положительных числа r и не зависящих от выбора: (). Условие 1 в опред. Даёт возможность в любой точке N0 поверхности Ляпунова S построить местную декартовую систему координат Оxyz. Усл. 2 показывает, что в построенной местной системе координат уравн. части поверхности Ляпунова S, расположенное внутри указанной сферы, может быть записано в виде разрешён. относительно одной системы корд. Условие 3 гарантирует, что частная производная , сущ. которой гарантирует условие 1, являются непрерывными функциями аргументов .  Потенциал двойного слоя: C:\Users\Vendol\Desktop\Безымянный.jpg:  Предел потенциала равен: U(M)==p\*=p=  = -cos(A,M,l) – (2). Предел располож. зарядов будем называть диполем. Постоянную величину p-моментом диполя,l-ось диполя.  U(M)=dS – (3). = Интегрирал, стоящий в правой части (3)-потенциал двойного слоя. Будем считать =, тогда потенциал двойного слоя: U(M)=-()dS= . | **59.Сведение краевых задач к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода.**  Для решения внутрен. Задачи Дирихле применим потенциал двойного слоя, т.е. U|S = f1()PS – (1), U(M)=dS– (2)  При таком выборе U является гармонической функцией 2(N0) + \*(N0)dS=f1(N0) – (3). 2(N0) -(N)dS= - f1(N0)-(4). Объединим записи (3)и(4). С этой целью введём параметр и ядро: (N0,N)= - \*(N)dS –(5). Тогда: (N0)-(N0,N)\* (N)dS=f(N0) -(6). При этом для внутрен. Задач Дирихле =1; f(N0)= f1(N0). Для внешней задачи Дирихле = -1; f(N0)= - f(N0).  Рассмотрим задачу Неймана. |S=f2(N) – (7). В ней необходимо найти граничную функцию в той или иной области удовл. (7). Решение необходимо искать в виде потенциала простого слоя: U(M)= dS – (8). Аналогично как и в случае з. Дирихле можно показать, что эта плотность удовлетворяет интегральному уравнению Фридгольма: (N0) - (N0,N)dS=g(N0); ǽ\*( N0,N)= -. При этом для внутренней задаче Неймана в интегральном уравнении (9) необходимо положить =-1, g(N0)=f2(N0), а для внешней задачи: =1, g(N0)= -f2(N0). | **60.Решение краевых задач методом функции Грина.**  Пусть U(M) гармонич. Функция в области , непрерывна вместе со своими произв. 1-го порядка вплоть до границы S области 𝛺 , тогда  U(M)= - (1), где r-расстояние(M0M); M0 –фиксированная точка ,лежащая внутри 𝛺 ;M- перемен. Точка поверхности S; dS=0 – (2). Вычтем (2)из(1): U(M0)= - , G(MM0)=+ g(M,M0) – эту функцию будем называть функцией Грина. Решение внутренней задачи Дирихле: =0, 𝛺 , U|S=f(M)  U(M0)=-  Свойства: 1) ф. Грина G(M,M0) на области 𝛺 принимает положительное значение;2) на области 𝛺функция Грина удовлетв. Двойному неравенству 0<G(M,M0)<; 3)ф. Грина на области 𝛺 симметрична, т.е. G(MM0)=G(M0M). В двумерном случае ф. Грина опред.: G(M,M0)=ln + g(M,M0); U(M0)=- U|l=f(M).  Ф. Грина , задача Неймана: Для решения воспользуемся формулой:  U(M0)= - (3) она не выражает решение задачи Неймана, поскольку содержит значение самой функции U на поверхности S. Также введём в рассмотрение функцию g(M,M0) кот. Как и функция т. М является гармоничной в области 𝛺 и непрерывна со своими первыми произв. До границы 𝛺 . Применим 2-ю ф-ю Грина: - (4); |S= - , mess-площадь поверхности S. G(M,M0)=+g(M,M0)-ф. Грина внутри задачи Неймана. Решение внутр задачи Неймана с граничным условием: |S=f(P); U(M0)=+U(P)dS. На плоскости функция Грина имеет вид: G(M,M0)=ln + g(M,M0). | **61. Уравнение Гельмгольца (принцип максимума, фундаментальное решение и потенциалы).**  Физические процессы описываемые ур-ем Г-г. будем называть:  . Если ур-е равно 0, имеем однородное ур-е Г-г., если не равно 0 – неоднородное. При C=0 ур-е Г-г превращается в ур-е Лапласа. **Принцип максимума:** Пусть U удовлетворяет уравнению Гельмгольца с C<0. Тогда функция не может достигать положительных максимальных и отрицательных минимальных значений во внутренней области.  **Найдём фунд. решение ур-я Г-г**., т.е решение обладающее сферической симметрией, переходя к сферическим корд. будем иметь, что ф-ия V=V(ρ), зависит только от длины рад.вектора., тогда в сферич. корд. однородное ур-е Г-г. превращ. в обыкнов. диф. ур-е 2-го порядка. (1) Для рассмотр. данного ур-я введём ф-ию , (2) - линейн. диф. ур-е с постоян. коэф. Св-ва их решений зависит от знака λ:  1) λ= -k2 < 0, тогда для ур-я (2) найдём 2 решения образующ.  функцию Г-г. и (. Учитывая замену получ. 2 фунд. решения однор. ур-я Г-г. ,  2) λ= k2 > 0, возьмём комплексно значимые решения , отсюда ,  Рассмотрев ур-е Г-г. (3) с заданной функцией f и носителем замыкания Ω, с с физ .точки зрения речь идёт о нахождении А установивш. колеб., возник за счёт источн. в области Ω . Использ. фунд. решение ур-я (3) заключаем что каждый из объёмных потенциалов ω3 и ω4 явл. решением ур-я (3). На бесконечности естественно А-колебаний уменьшается, но ω3 →0 и ω4→0, когда точка P0 уходит в бесконечность, поэтому чтобы выделить описываемый физ.процесс, дополнительно требуют выполнение, так называемых условий излучения:  ; . |
| **62. Уравнение Гельмгольца (построение решения на неограниченной области, условия излучения и лимитирующего поглощения).**  Ур-е Г-г. , Если , равно 0, имеем однородное ур-е Г-г., если не равно 0 – неоднородное. При λ=0 ур-е Г-г превращается в ур-е Лапласа.  В случае неограниченной области убывающее на бесконечности решение Г. ур. не является единственным при λ>0 . В этом случае для выделения единств. решения ставят дополнит. условия излучения - один из возможных видов граничных условий на бесконечности, к-рые выделяют единств, решения краевых задач для ур-ний, описывающих установившиеся колебания. Введены для Гелъмголъца уравнения du+k2u=f(r). В пространстве трёх измерений усл. излуч. для волнового поля и таковы: при r'' : u ~ r-1, lim r(dU/dr - iku)=0. В двумерном пространстве при r'': u~r-1/2, lim r 1/2(dU/dr - iku)=0. Всякое решение однородного ур-ния Гельмгольца, удовлетворяющее второму условию, удовлетворяет и первому при k>0. Для др. эллиптич. ур-ний усл. излучения не всегда определяют условия разрешимости краевой задачи, поэтому развиты др. способы выделения единств, решения. Согласно принципу предельного поглощения, решение в среде без поглощения является пределом огранич. решения в поглощающей среде при стремлении поглощения к нулю.  **67.Понятие Специальных функций** - отдельные классы функций, возникающих вомногихтеоретич. и прикладных задачах, обычно при решении дифференц. ур-ний. ортогональные полиномы, сферические функции, цилиндрические функции, гипергеометрическиефункции и вырожденные гипергеометрические функции, параболическогоцилиндра функции, интегральные синус и косинус, интеграл вероятности. Все перечисленные ф-ции, за исключением гамма-функции, ф-цийМатьёиэллиптич. ф-ций, являются решениями обыкновенного дифференц. ур-ния 2-гопорядка:+ +u=0 (1)где полиномы, степень которых не выше 2. -полином, степень которого не выше 1.z - комплексная переменная.Напр., ур-ние Бесселя  z+( является частным случаем ур-ния (1) при , с помощью замены u=, и выбора ф-ииур-ие (1) можно привести к виду: ++Лy=0 (2) ур-ние (2) имеет полиномиальные решения, определяемые ф - л о й Р од р и г а: y=yn(z)=[(z)(4) [В п - нормировочная постоянная, п – степеньполинома, ф-цияудовлетворяет ур-июк-рые после линейной замены переменной переходят в классич. Ортогональныеполиномы (полиномы Якоби, Лагерра и Эрмита).Ур-ние (2) в зависимости от степени полинома можно привести к следующим канонич. видам:z(1-z)+[гиперболическое ур-ие Гаусса: z+( вырожденное гиперболическое ур-ие) =0  (уравнение Эрмита). Обобщая ф-луРодрига (4), можно получить в явном виде частные решенияур-ния(2) при произвольных Л в виде интегрального представления: y= (5) где величина v связана с Л соотношением, аналогичным соотношению Л+функция -решение ур-ия контур С - отрезок прямой (s1, s2), наконцах к-рого выполнено условие: Контуры такого вида можно выбрать лишь при нек-рыхограничениях, наложенныхнакоэф. ур-ния (2). Распространение результатов, полученных при такихограничениях, на более общие случаи можно получить с помощью аналитич. <продолжения решений. Из интегрального представления (5) легко вывести всесвойстваперечисленных С. ф.: разложения в степенные ряды, разл. функциональныесоотношения, асимптотич. разложения и др.  **65. Разностная схема (решение задачи Дирихле методом конечных разностей).**  Рассмотрим двумерный случай ур-я вида: ; а1,а2,а удовлетворяет усл.  Аппроксилируем диф оператор L –уонечно разностным опрератором:  где ширина ячейки сетки h явл.малым положит.числом. заметим,что для всякой ф-и u из класса при h мы имеем чтобы сформулировать граничную задачу для этого разностного ур-ния, введем след.обозначения. точки (x+h,y), (x,y+h), (x-h,y), (x,y-h) назовем h-соседними для точки =(x,y) и обозначим через областью решетки назовем множество точек , расположенных в J, имеющих координаты, которые являются целыми кратными h, и таких, что для каждой точки этого множества ее h-соседние точки принадлежат . подставим теперь для разностного ур-ния след.задачу Дирихле: =f в ; u=φ в . (2) разумеется, решение u этой задачи определено только в N+M точках решетки . покажем, что для ф-й u,определенных на области решетки , справедлив след.принцип max. Если в , то либо ф-я u постоянна, либо она принимает свое max значение на границе обл.. Следующая оценка решения задачи Дирихле: |u| (3). из оценки (3) сразу следует.что задача Дирихле (2) может иметь не более одного решения, поскольку разность двух решений удовлетворяет условиям однородной задачи, а в силу (3), если . Но разностная задача Дирихле (2) сводится к решению с-мы лин.ур-ний, причем число ур-ний с-мы равно числу точек в *,* т.е.равно числу неизвестных u(,…,u(. Задача Дирихле для разностного ур-ния всегда имеет единственное решение. | **63. Интегральные уравнения с симметричными ядрами (частные значения и частные функции).**  Пусть имеется и. у. 2-го рода с действительным симметричным ядром: (1)  достаточно предполагать, что симметричное ядро К измеримо на квадрате [а, b]X[ а, b] (2)  а свободный член f и искомая функция j - интегрируемые с квадратом функции на отрезке [ а, b]  Изучим ряд общих свойств собственных чисел и собственных функций однородного симметричного и. у.:   (3)  Уравнение (3) обладает по крайней мере одним собственным числом (когда К почти всюду не равно нулю); собственные функции, принадлежащие различным собственным числам,- ортогональны; собственные числа - действительны; на любом конечном сегменте значений параметра X может находиться лишь конечное множество собственных чисел.  Множество всех собственных чисел уравнения (3) наз. спектром этого уравнения {m1, m2, ..., ..., mn,...}; каждому числу mn спектра соответствует конечное множество линейно независимых собственных функций. Собственные числа и собственные функции можно расположить в виде последовательностей:  } … (4)   так, что абсолютные величины собственных чисел не убывают |; каждое собственное число повторяется столько раз, сколько собственных функций ему соответствует. Поэтому каждому числу mk в (4) соответствует лишь одна собственная функция. Можно считать, что система функций {jk} ортонормирована. Последовательности (4) наз. системой собственных чисел и собственных функций симметричного ядра К или уравнения (3). Нахождение этой системы равносильно полному решению однородного симметричного и. у. (3).  Зная систему (4) собственных чисел и собственных функций, можно построить решение неоднородного уравнения (1).  Теорема: Если X не является собственным числом ядра К, то симметричное и. у. (1) имеет единственное решение Ф, выражаемое формулой φ(x)=f(x)+λ (5). где lk- собственные числа, fk - коэффициенты Фурье функции f относительно ортонормированной системы {jm} собственных функций ядра, т. е. | **64. Задача Штурма-Лиувилля и интегральные уравнения.**  Рассм. след задачу  y(0)=y(k) = 0 (2); k(x)>0, p(x)>0, x€[0,k]  Фун-я Грина для ур-я (1) будет показывать ф-ю 2-ух переменных G(x,S), определённую в квадрате множ-во точек x,S таких что 0≤x,S≤ l и удовл. следующим 3м условиям:  1) как ф-я аргумента x, ф-я G непрерывна вместе со своими производными второго порядка включит, всюду в квадрате за исключ. диагоналей x,S. (3)  2) выполн. граничн условия G(0,S)=G(l,S)=0 (4)  3) сама ф-я G на диагон. x=S непрерывна, а её первая произв по x, третий разрыв первого рода типа скачок .  Покажем что такая ф-я Грина существует. (k(x)y`(x) – q(x)y=0) имеет 2 лин независимых решения. y1(x), y2(x). Выберем что  y1(0) = y2(0) = 0. Ф-ю Грина будем искать в виде  Ф-я (7) удовл. ур-ю (3)  т.к. y1 и y2 его решения.  Проверим 2-е условие: G(0,S)=A(S) y(0)=0; G(l,S)=B(S) y(l)=0  Условие 3, из непрерывности ф-ии G на диагон. S вытекает равенство A(S)y1(S)=B(S)y2(S) отсюда получим  на диагон. G(S)=  Окончательно получаем выр-е для функции Грина вида:  C(x,S)= Аналогично G(x,S)=G(S,x)  Рассм. однор ур-е 2-го рода: y(x)=  Справедлива теорема: всякое решение интегр. ур-я (9) явл. решением задачи Штурма-Лиувиля(1)(2), всякое решения задач (1)(2) явл. решением ур-я (9). Т.о. вместо решения задачи Шт-Л. 1,2 достаточно найти решение ур-я 9 с ядром K(x,S) = G(x,S)p(S) .  **68. Цилиндрические функции. Примеры цилиндрических функций.**  ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ (функции Бесселя)- решения Zv(z)ур-ния Бесселя  . (1)  где параметр (индекс) v-произвольное действительное или комплексное число. В приложениях чаще встречается ур-ние, зависящее от четырёх параметров:  υ’’+(2) решения к-рого выражаются через Ц.ф.: u(z) = zaZv(bzg). Среди ур-ний (2) содержится ур-ниеu'' - zu = 0, к-рое порождает Эйри функции. Ц. ф. произвольного порядка. Если v не является целым числом, то общее решение ур-ния (1) имеет вид где c1 и c2- постоянные, Jv и J-v - ф-ции Бесселя 1-го рода (или Ц. ф. 1-го рода, рис. 1, а). Если v - целое, то Jv и J\_v линейно зависимы. Поэтому наряду с Jv(z)вводят ф-ции Бесселя 2-го родаYv(z)[иногда их наз. Nv(z)]  Модифицированные ф-ции Бесселя (ф-ции Бесселя мнимого аргумента)-решения ур-ния z²u’’+zu’-(z²+υ²)u=0, u(z)=  Линейно независимыми решениями при z>0 являются ф-ции  Интегральные представления Пуассона (Rev>-1/2):  Интегральные представления Зоммерфельда для  Kv(z)(Rez>0)  Асимптотическое поведение при z+:  =.  Связь между ф-циям и Iv(z) и Kv(z): | **66. метод прогонки.** Метод прогонки(метод матричной прогонки)позволяет решить систему алгебраических линейных уравнений. С этой целью введя в обозначение матрицы с-му линейных алгебраических уравнений можем записать в матричной форме: -CoVo+BoVo=-Fo (9); Ai – CiVi + Bi =-Fi, i=1…N-1 (10). - = (11); =0, .=, i=0…N; =, i=0…M;  Согласно методу прогонки, решение с-мы (9-11) ищем в виде:  +, i=(12), здесь , матрица тойй же размерности, что иAi, – вектор-столбец размерности М+1, которые требуют определения. В (12) положим, что i=0  Vi+=Bo, =Foиз (12) =Vi+ подставив эти соотношения в (10) получим: +сравнивая с (12) находим =(14) i=1….N-1 т.о использую ф-лы (13, 14) последовательно находим , . При i=1….N-1. Это прямой ход метода прогонки. Для обратного хода из с-мы уравнений составленный из (11), (12) находим: , , получаем  Найдя последнее значение из (12) последовательно находятся и это обратный ход метода матричной прогонки, т.е нахождение приближенного значения решения уравнения задачи Дирихле.  **70. Применение специальных функций.** Специальные функции используются для решения уравнений с частными производными, например, метод разделения переменных в цилиндрических и сферических координатах приходим к цилиндрическим и сферическим функциям.  Одна из характерных особенностей этих функций состоит в том, что как правило, являются решением уравнения: с особыми точками, т.е. коэффициент обращается в нуль в одной или нескольких точках промежутка изменения переменной . Решение таких уравнений имеет ряд специфических свойств. Также используются для решения многих задач в физике, математике и технике.  **69. Сферические функции**  **Полиномы Лежандра и их свойства**  Рекуррентная формула позволяет вычислить полином**n+1** степени, если известны значения полиномов**n** и**n-1** степеней  (n+1) (1)  Производящая функция полиномов Лежандра используется в представлении потенциала притяжения рядом по сферическим функциям. Она имеет вид  (2)  **Ортогональность сферический функций**  Ортогональность полиномов Лежандра определяется формулой , (3)где - символ Кронекера. Присоединенные функции Лежандра также обладают свойством ортогональности. Из теории специальных функций известно, что , при m≠0. (4)  Сферические функции также образуют класс ортогональных функций. Докажем свойство ортогональности сферических функций. Возьмем две шаровые функции первого рода   и . Применим к ним вторую формулу Грина для сферы. Учитывая, что , формула Грина принимает вид  (5).  Для сферы производная по нормали совпадает с производной по радиус-вектору ρ, поэтому  Подставляя полученные выражения в формулу (5), будем иметь  Поскольку радиус-вектор -- постоянная величина, полученное выражение можно переписать в следующем виде (6).  При m≠l приведенный интеграл равен нулю, что указывает на ортогональность сферических функций.  Вернемся теперь к сферическим функциям степени , заданной в общем виде   Функции вида   , . (8).  называются сферическими гармониками. Очевидно, что , =0. Можно показать,что ; . (9).  Все основные выкладки можно найти в учебниках по специальным функциям.  **Нормированные сферические функции**  Как мы видели, средние значения квадратов сферических гармоник достаточно сложно выражаются через постоянные**m** и **n**. Однако, каждую из гармоник можно умножить на постоянные так, чтобы интегралы в формулах (4.9) были равны единице. Эта операция называется нормировкой. Обозначая чертой сверху нормированные функции, можно записать( (  где - нормировочный множитель. Выберем его так, чтобы выполнялись равенства =1, =1(10)**.** Обращаясь к формулам (4.9) легко устанавливаем, что  Полученную формулу можно переписать следующим образом , где (11).  Операции нормировки подвергают не только сферические гармоники, но и полиномы и функции Лежандра. В частности, если нормированная сферическая функция имеет вид  То  . |